Bestimmung einer Tangente und einer Normalen an eine Kurve

Kommentierte Musterlösung

Aufgabe

An einen Bach, dessen Verlauf im örtlichen Naherholungsgebiet näherungsweise durch die Funktion

$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 2x - 30$,

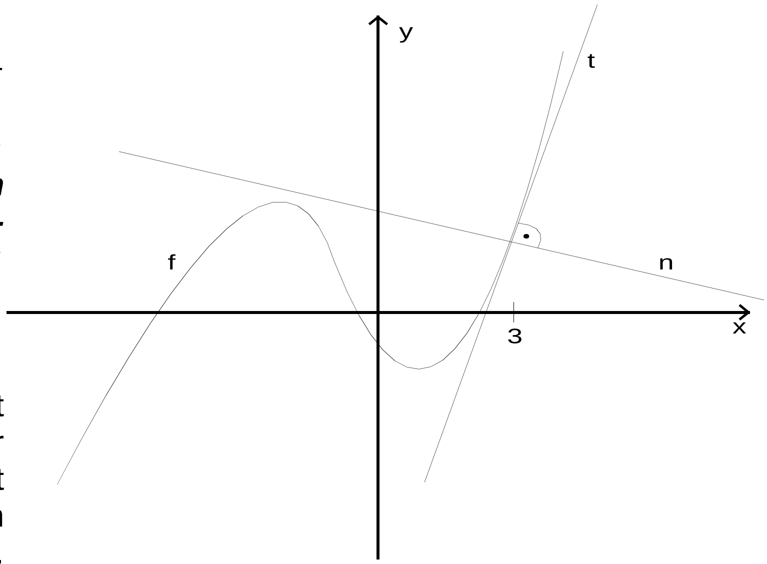
mit x: Strecke in Ost-West-Richtung in 100 m,
f(x): Strecke in Nord-Süd-Richtung in 100 m

beschrieben wird, soll am Streckenpunkt 300 m ein geradliniger Spazierweg, der das Bachufer berührt, angelegt werden. Außerdem ist an dieser Stelle eine Brücke geplant, die den Spazierweg rechtwinklig kreuzt.
Stellen Sie für Spazierweg und Brücke die Funktionen auf, die deren Verläufe in der Nähe der angegebenen Stelle beschreiben.

Bearbeitung

1. Skizze und Ansatz

*Bei geometrischen Problemen sollte **immer** eine Skizze erstellt werden. Eine Skizze ist **keine** zeichnerische Lösung, sondern ein Schaubild, das **alle wichtigen Informationen** enthält, als **Konzentrationshilfe** dient und zu **Lösungsansätzen verhilft**.*



An nebenstehender Skizze ist zu erkennen, daß der Spazierweg eine Tangente t und die Brücke eine Normale n an die Bachkurve f darstellen. Daraus ergeben sich folgende Ansätze:

Lösungsansätze Tangente:

- Tangenten sind Geraden: $t(x) = m_T \cdot x + b_T$
- Tangente und Kurve haben im Berührpunkt dieselbe Steigung: f'(x) = t'(x)
- Tangente und Kurve haben am Berührpunkt dieselben Koordinaten: f(x) = t(x)

Lösungsansätze Normale:

- Normalen sind Geraden: $n(x) = m_N \cdot x + b_N$
- Normale und Tangente stehen definitionsgemäß rechtwinklig aufeinander: $m_N = -\frac{1}{m_T}$
- Normale und Kurve haben am Berührpunkt dieselben Koordinaten: f(x) = n(x)

2. Ermittlung der Tangente

2.1. gemeinsame Steigung von Kurve und Tangente: f'(3) = t'(3)

Die 1. Ableitung einer Funktion gibt ihr Steigungsverhalten an.

$$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 2x - 30$$
$$f'(x) = -6x^2 + 16x + 2$$
$$f'(3) = -6 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 + 2 = -54 + 48 + 2 = -4$$
$t'(x) = m_T$ für alle x ϵ D

➔ Zwischenergebnis: $t(x) = -4x + b_T$

2.2. Berührpunkt als gemeinsamer Punkt von Kurve und Tangente: f(3) = t(3)

$$f(3) = t(3)$$
$$\Leftrightarrow -2 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 30 = -4 \cdot 3 + b_T$$
$$\Leftrightarrow -54 + 72 + 6 - 30 = -12 + b_T$$
$$\Leftrightarrow -6 = -12 + b_T$$
$$\Leftrightarrow 6 = b_T$$

➔ Ergebnis: $t(x) = -4x + 6$

3. Ermittlung der Normalen

3.1. Normale und Tangente stehen rechtwinklig aufeinander

$$m_N = -\frac{1}{m_T} \Rightarrow m_N = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

➔ Zwischenergebnis: $n(x) = \frac{1}{4} \cdot x + b_N$

3.2. Berührpunkt als gemeinsamer Punkt von Kurve und Normale: f(3) = n(3)

$$f(3) = n(3)$$
$$\Leftrightarrow -6 = \frac{1}{4} \cdot 3 + b_N$$
$$\Leftrightarrow -\frac{24}{4} = \frac{3}{4} + b_N$$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{4} = b_N$$

➔ Ergebnis: $n(x) = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{27}{4}$

4. Probe!!!
Die Aufgabe ist bereits gelöst. Zur Sicherheit sollte die Lösung durch eine Probe kontrolliert werden.

$$t(3) = -4 \cdot 3 + 6 = -12 + 6 = -6 = f(3) \ \checkmark$$

$$n(3) = \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{27}{4} = -\frac{24}{4} = -6 = f(3) \ \checkmark$$

Ergebnis / Antwort

Der Spazierweg, der den Bachverlauf in x = 3 tangiert, wird beschrieben durch die Funktion:

$$t(x) = -4x + 6$$

Die Brücke, die den Bach – und den Spazierweg – in x = 3 senkrecht schneidet, wird beschrieben durch die Funktion:

$$n(x) = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{27}{4}$$