Extremwertaufgabe, kommentierte Musterlösung

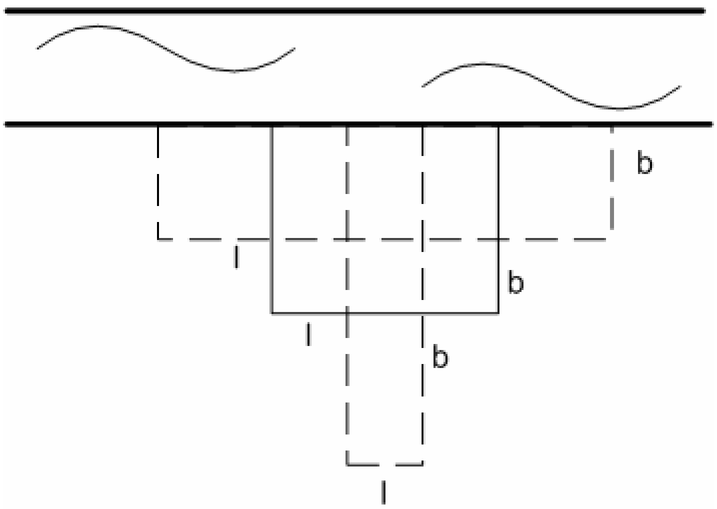
Aufgabe

An einem Flußufer soll mit einem 12 Meter langen Zaun ein möglichst großes Grundstück mit rechteckigem Grundriß eingezäunt werden. Der Fluß dient als natürliche Grenze.
Welche Abmessungen hat das Grundstück, und wie groß ist sein Flächeninhalt?

Bearbeitung

1. Skizze mit Varianten

Bei diesem Aufgabentyp geht es um ein Problem, das zunächst verschiedene Lösungen zuläßt (hier: Grundstück mit 12 m Zaum eingrenzen). Das Problem ermöglicht i.a. aber dadurch eine eindeutige Lösung, daß eine Größe auf ein bestimmtes Ziel hin optimiert werden soll (hier: Fläche soll maximal werden). Um sich über die Lösungsmöglichkeiten und die Einflußgrößen klar zu werden, sollte man besonders als Anfänger mehrere Lösungen skizzieren.



2. Funktion mit Definitionsmengen aufstellen

Flächenfunktion $A(l,b) = l \cdot b$
mit $0 \leq l \leq 12$; $0 \leq b \leq 6$

3. Funktion mit Hilfe von Nebenbedingungen auf eine Einflußgröße reduzieren

Die Funktion A(l, b) ist von mehr als einer Variablen abhängig. Mit Hilfe von Nebenbedingungen muß man die Anzahl dieser Variablen auf 1 reduzieren, damit eine Funktionsuntersuchung, z.B. eindeutige Ableitungen, möglich sind.

Nebenbedingung: Der Zaun ist insgesamt 12 m lang.

$\Rightarrow l + 2b = 12$

$\Leftrightarrow l = 12 - 2b$

einsetzen in die Funktion: $A(b) = (12-2b) \cdot b = -2b^2 + 12b$

Jetzt ist die Flächenfunktion A nur noch von b abhängig und kann nach b abgeleitet werden.

4. Extremwert ermitteln

Notwendige Bedingung für ein Extremum: A'(b) = 0

$$A'(b) = -4b + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 3$$

Hinreichende Bedingung für ein Extremum: A'(b) = 0 ^ A''(b) $\neq 0$

$$A''(b) = -4$$

$$\Rightarrow A''(3) = -4 < 0$$

➔ Bei einer Grundstücksbreite von 3 Metern liegt ein Extremum vor, und zwar ein Maximum. ✓

5. Fehlende Größen bestimmen und Probe

Die Aufgabenstellung verlangte nicht nur die Grundstücksbreite, sondern beide Abmessungen – also auch die Grundstückslänge – sowie den maximalen Flächeninhalt.

Grundstückslänge: $l = 12 - 2b = 12 - 2 \cdot 3 = 6$

Grundstücksfläche: $A(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = -18 + 36 = 18$

Probe (!!!): $l + 2b = 6 + 2 \cdot 3 = 12$ ✓

6. Definitionsränder prüfen

Eine Funktionsuntersuchung gilt nur innerhalb der Definitionsmenge. Vor allem der Begriff der Ableitung (Steigung!) ist nur innerhalb eines Intervalls, nicht an seinen Rändern sinnvoll. Deshalb müssen die Definitionsgrenzen i.a. gesondert untersucht werden.

Es galt: $0 \leq b \leq 6$

Untergrenze: $A(0) = -2 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0 < 18$ ✓

Obergrenze: $A(6) = -2 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 = -72 + 72 = 0 < 18$ ✓

➔ Auch an den Funktionsrändern beträgt der Flächeninhalt weniger als das innerhalb der Definitionsmenge ermittelte Maximum von 18 m². Also erhält man das Ergebnis:

Bei einer Breite von 3 m und eine Länge von 6 m hat das Grundstück einen maximalen Flächeninhalt von 18 m².