Steckbriefaufgabe, kommentierte Musterlösung

Aufgabe:

Eine ganz-rationale Funktion dritten Grades hat im Wendepunkt $P_1(1|y)$ die Steigung -2 und im Punkt $P_2(0|5)$ einen Extrempunkt.
Bestimme die Funktionsgleichung!

Bearbeitung:

$f(x) = a * x^3 + b * x^2 + c * x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Zuerst die Funktionsgleichung in allgemeiner Form aufschreiben, so erkennt man die Anzahl der Unbekannten. Hier sind es 4 Unbekannte. Aus dem Aufgabentext müssen also 4 Informationen gewonnen werden.

Praxistip: Wenn die Aufgabe einen Punkt mit dem x-Wert 0 enthält, wird dieser zuerst ausgewertet, weil dann die meisten Summanden in der Funktionsgleichung wegfallen. So kann man schneller Ergebnisse erzielen und folgende Gleichungen vereinfachen. Hier wird in der Aufgabe zwar P_1 vor P_2 erwähnt, dennoch beginnt man mit P_2.

A: Auswertung

1) $P_2(0|5)$ liegt auf dem Graphen ➔ $f(0) = 5$

$f(0) = \boxed{d = 5}$

erste Unbekannte gelöst

2) $P_2(0|5)$ ist Extrempunkt, in P_2 ist damit die Steigung 0 ➔ $f'(0) = 0$
Die 1. Ableitung gibt die Steigung an.

$f'(x) = 3a * x^2 + 2b * x + c$
$f'(0) = \boxed{c = 0}$

zweite Unbekannte gelöst

3) $P_1(1|y)$ hat die Steigung -2 ➔ $f'(1) = -2$

Die Erkenntnis c = 0 wird sofort benutzt, deswegen wurde mit P_2 begonnen.
$f'(1) = 3a + 2b = -2$ Gleichung (I)

4) $P_1(1|y)$ ist Wendepunkt, in P_1 ist damit die Krümmung 0 ➔ $f''(1) = 0$
Die 2. Ableitung gibt die Krümmung an.

$f''(x) = 6a * x + 2b$
$f''(1) = 6a + 2b = 0$ Gleichung (II)

B: Gleichungssystem

Zwei Gleichungen für zwei verbliebene Unbekannte ➔ Problem ist lösbar.

(I)	$3a + 2b = -2$	
(II)	$6a + 2b = 0$	(II) – (I)
(I)	$3a + 2b = -2$	
(II)	$3a = 2$	|:3

➔ $a = 2/3$

dritte Unbekannte gelöst

in (I):	$3 * 2/3 + 2b = -2$	
⇔	$2 + 2b = -2$	|-2
⇔	$2b = -4$	|:2
⇔	$b = -2$	

vierte Unbekannte gelöst

Lösung: $\boxed{f(x) = 2/3 * x^3 - 2 * x^2 + 5}$

C: Probe

1) $f(0) = 5$ ✓

2) $f'(x) = 2 * x^2 – 4 * x$
$f'(0) = 0$ ✓

3) $f'(1) = 2 – 4 = -2$ ✓

4) $f''(x) = 4 * x – 4$
$f''(1) = 4 – 4 = 0$ ✓