Unterbestimmte Steckbriefaufgabe

Kommentierte Musterlösung

Aufgabe

Zu bestimmen sind alle ganz-rationalen Funktionen dritten Grades, die durch den Punkt P(1|11) gehen, eine Wendestelle bei $x = 2$ haben und die y-Achse in 7 schneiden.

Bearbeitung

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$

A: Auswertung

1) f schneidet die y-Achse in 7, d.h. (0|7) liegt auf dem Graphen ➔ $f(0) = 7$

$f(0) = \boxed{d = 7}$

eine Unbekannte gelöst

***Praxistip**: Wenn vorhanden, immer mit dem Punkt mit $x = 0$ anfangen. Arbeitsersparnis durch Wegfall der meisten Summanden im Funktionsterm.*

2) P(1|11) liegt auf dem Graphen ➔ $f(1) = 11$

$f(1) = a + b + c + 7 = 11 \quad | -7$

$\Leftrightarrow a + b + c = 4 \quad$ Gleichung (I)

3) Wendestelle $x = 2$ ➔ Wendepunkt = Krümmungswechsel. An der Stelle 2 hat der Graph also die Krümmung 0. ➔ $f''(2) = 0$

2. Ableitung gibt das Krümmungsverhalten der Funktion an.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(2) = 12a + 2b = 0 \quad | :2$

$\Leftrightarrow 6a + b = 0 \quad$ Gleichung (II)

4) Eine vierte Information über die Funktionen gibt es nicht. Wie die Aufgabenstellung bereits aussagte, gibt es mehrere Funktionen, die die o.a. Anforderungen erfüllen.

B: Gleichungssystem

(I) $a + b + c = 4$
(II) $6a + b = 0$

Das Lineare Gleichungssystem (LGS) besteht bei drei Unbekannten nur aus zwei Gleichungen. Das LGS ist damit unterbestimmt. Damit läßt es keine eindeutigen Lösungen für alle Unbekannten zu. Man kann nur die Anzahl der Unbekannten auf 1 reduzieren, denn 3 (Gleichungen) minus 2 (Unbekannte) = 1 (Unbekannte übrig).

(II) $6a + b = 0 \quad | -6a$
$\Leftrightarrow \quad b = -6a$

einsetzen in (I):

(I) $a - 6a + c = 4$
$\Leftrightarrow \quad -5a + c = 4 \quad | +5a$
$\Leftrightarrow \quad c = 5a + 4$

a ist nicht weiter zurückführbar. Daraus folgt:
a sei beliebig, $b = -6a$, $c = 5a + 4$ und $d = 7$.

Lösung: $f(a, x) = ax^3 - 6ax^2 + (5a + 4)x + 7$

f ist von zwei unabhängigen Variablen abhängig. Die Idee ist jedoch, daß x immer frei wählbar ist, während a einmal gewählt wird und danach für den Rest der Betrachtung diesen Wert beibehält. Damit ist f eine **Funktionsschar**, die nach der Wahl eines beliebigen, dann aber gleichbleibenden a nur noch von x abhängt. Man schreibt:

$$\boxed{f_a(x) = ax^3 - 6ax^2 + (5a + 4)x + 7 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}^{\neq 0}}$$

Zur Definitionsmenge von a: Mit a werden nur Rechungen durchgeführt (Multiplikation, Addition / Subtraktion), die für alle reellen Zahlen zulässig sind. Allerdings darf a nicht den Wert 0 annehmen, da sonst der Summand mit der größten Potenz im Funktionsterm (hier: x^3) wegfiele und f_a damit keine Funktion (oder besser: Funktionsschar) dritten Grades mehr wäre.

C: Probe

$f_a(x) = ax^3 - 6ax^2 + (5a + 4)x + 7$
$f_a'(x) = 3ax^2 - 12ax + (5a + 4)$
$f_a''(x) = 6ax - 12a$
$f_a'''(x) = 6a$

1) $f_a(0) = 7$ ✓
2) $f_a(1) = 11 \Rightarrow f_a(1) = a - 6a + (5a + 4) + 7 = 11$ ✓
3) $f_a''(2) = 0 \wedge f_a'''(2) \neq 0 \Rightarrow f_a''(2) = 12a - 12a = 0 \wedge f_a'''(2) = 6a \neq 0$ ✓
für alle $a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$